第５講　平面図形

17　x を正の実数とする．座標平面上の 3 点 A(0, 1)，B(0, 2)，P(x, x) をとり，△APB を考える．x の値が変化するとき，∠APB の最大値を求めよ．

《10 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

18　一辺の長さが１の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする．このとき $\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ．

《15 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

19　$1<a<2$ とする．3辺の長さが $\sqrt{3}$，a，b である鋭角三角形の外接円の半径が1であるとする．このとき a を用いて b を表せ．《10 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

20　点 O を中心とする正十角形において，A，B を隣接する 2 つの頂点とする．線分 OB 上に $\mathrm{OP}^2=\mathrm{OB}\cdot\mathrm{PB}$ を満たす点 P をとるとき，$\mathrm{OP}=\mathrm{AB}$ が成立することを示せ．

《10 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

21　△ABC は，条件 ∠B＝2∠A，BC＝1 を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする．このとき，cos ∠B を求めよ．《14 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　平面図形

17 x を正の実数とする．座標平面上の 3 点 A(0, 1)，B(0, 2)，P(x, x) をとり，△APB を考える．x の値が変化するとき，∠APB の最大値を求めよ．

《10 京大・理系》

【答】 $\dfrac{\pi}{4}$

【解説】 △APB の外接円を C とし，C の半径を R とする．

このとき，∠APB は C の弧 AB に対する円周角である．

ここで，弦 AB が一定なので，半径 R が減少すれば中心角は増加して，それにともない円周角も増加する．

点 P は直線 $y=x$ 上を動くので，C が $y=x$ と共有点をもちながら半径が最小になるものを考えたときの円周角が求める最大値である．つまり C と $y=x$ が接する場合を考えて，その接点を P ととればよい．

このとき, 方べきの定理より $\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}=\mathrm{OP}^2$ が成り立ち, $\mathrm{OA}=1$, $\mathrm{OB}=2$ より $\mathrm{OP}=\sqrt{2}$.

よって P(1, 1)．このとき △APB は直角二等辺三角形より求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$.

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

18　一辺の長さが1の正四面体ABCDにおいて，Pを辺ABの中点とし，点Qが辺AC上を動くとする．このとき $\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ．

《15京大・理系》

【答】 $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

【解説】 $\mathrm{AQ}=t$ とおくと，点Qは辺AC上より $0\leqq t\leqq 1$ である．

PはABの中点より $\mathrm{AP}=\dfrac{1}{2}$ であることと，$\angle\mathrm{DAP}=\angle\mathrm{PAQ}=\angle\mathrm{QAD}=\dfrac{\pi}{3}$ であることより，△DAP，△PAQ，△QADに余弦定理を用いると，

$$\mathrm{PD}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AD}^2-2\times\mathrm{AP}\times\mathrm{AD}\times\cos\angle\mathrm{DAP}$$
$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{AQ}^2-2\times\mathrm{AP}\times\mathrm{AQ}\times\cos\angle\mathrm{PAQ}$$
$$\mathrm{QD}^2=\mathrm{AQ}^2+\mathrm{AD}^2-2\times\mathrm{AQ}\times\mathrm{AD}\times\cos\angle\mathrm{QAD}$$

より $\mathrm{PD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{4t^2-2t+1}}{2}$，$\mathrm{QD}=\sqrt{t^2-t+1}$ を得る．

ここで△PDQに余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos\angle\mathrm{PDQ}&=\frac{\mathrm{PD}^2+\mathrm{QD}^2-\mathrm{PQ}^2}{2\times\mathrm{PD}\times\mathrm{QD}}\\&=\frac{\frac{3}{4}+(t^2-t+1)-\left(t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\right)}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{t^2-t+1}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\sqrt{1+\frac{8-5t}{t^2-t+1}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\sqrt{1+\cfrac{1}{\frac{8-5t}{25}+\frac{49}{25(8-5t)}-\frac{11}{25}}}\end{aligned}$$

となる．

$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$\dfrac{8-5t}{25}>0$，$\dfrac{49}{25(8-5t)}>0$ なので，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{8-5t}{25}+\frac{49}{25(8-5t)}\geqq 2\sqrt{\frac{8-5t}{25}\times\frac{49}{25(8-5t)}}\left(=\frac{14}{25}\right)$$

が成り立つ．等号成立は $\dfrac{8-5t}{25}=\dfrac{49}{25(8-5t)}$ つまり $8-5t=7$

∴　$t=\dfrac{1}{5}$ のときで，これは $0\leqq t\leqq 1$ をみたす．

よって求める最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times\sqrt{1+\cfrac{1}{\frac{14}{25}-\frac{11}{25}}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

19　$1<a<2$ とする．3 辺の長さが $\sqrt{3}$，a，b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする．このとき a を用いて b を表せ．《10 京大・理系》

【答】 $b=\dfrac{\sqrt{12-3a^2}+a}{2}$

【解説】 長さが a の辺の対角の大きさを α，長さが b の辺の対角の大きさを β とすると，正弦定理より

$$2\times 1=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}$$

が成り立つので，$\sin\alpha=\dfrac{a}{2}$，$\sin\beta=\dfrac{b}{2}$，$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を得る．

ここで，長さ $\sqrt{3}$ の対角の大きさが鋭角より $0<\pi-(\alpha+\beta)<\dfrac{\pi}{2}$ つまり $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$ なので，$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}\pi$．

よって

$$\begin{aligned}\frac{b}{2}&=\sin\beta\\&=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\alpha\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\end{aligned}$$

ゆえに $\boldsymbol{b=\dfrac{\sqrt{12-3a^2}+a}{2}}$．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

20 点 O を中心とする正十角形において，A，B を隣接する 2 つの頂点とする．線分 OB 上に $OP^2=OB\cdot PB$ を満たす点 P をとるとき，$OP=AB$ が成立することを示せ．

《10 京大・文系》

【答】 略

【解説】 $OB=r$，$OP=t$ とおくと，$PB=r-t$ なので

$$OP^2=OB\cdot PB \iff t^2=r(r-t)$$
$$\iff t^2+rt-r^2=0$$

ここで $r>0$，$t>0$ より $t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}r$ となる．

また $\triangle OAB$ に余弦定理を用いると，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{5}$，$OA=OB=r$ より

$$\begin{aligned} AB^2&=OA^2+OB^2-2\times OA\times OB\times\cos\frac{\pi}{5}\\ &=r^2+r^2-2\cdot r\cdot r\cos\frac{\pi}{5}\\ &=2r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)\\ &=4r^2\sin^2\frac{\pi}{10}\end{aligned}$$

より $AB=2r\sin\dfrac{\pi}{10}$ を得る．

ここで $\sin\dfrac{\pi}{10}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{10}\right)=\cos\dfrac{2}{5}\pi$ であるが，$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$ とおくと，$5\theta=2\pi$ より

$$\cos3\theta=\cos(2\pi-2\theta)=\cos2\theta$$

より

$$4\cos^3\theta-3\cos\theta=2\cos^2\theta-1 \iff (\cos\theta-1)(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)=0$$

となるが，$0<\cos\theta=\cos\dfrac{2}{5}\pi<1$ より $\cos\dfrac{2}{5}\pi=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ を得るので，$AB=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}r$ を得る．

よって $OP=AB$ が示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

|21| △ABC は，条件 ∠B＝2∠A，BC＝1 を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする．このとき，cos ∠B を求めよ．《14 京大・理系》

【答】 $\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$

【解説】 AB＝c，CA＝b，∠A＝θ とおく．

BC＝1，∠B＝2θ より ∠C＝$\pi-3\theta$ なので，正弦定理より，

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{c}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{b}{\sin 2\theta}$$

となるので，$b=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$，$c=\dfrac{\sin(\pi-3\theta)}{\sin\theta}$ より $b=2\cos\theta$，$c=3-4\sin^2\theta$ を得る．

面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}bc\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot(3-4\sin^2\theta)\cdot\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\sin 2\theta(1+2\cos 2\theta)\end{aligned}$$

となるが，$\cos 2\theta=t$ とおくと $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\,(1+2t)=\dfrac{1}{2}\sqrt{(1-t^2)(1+2t)^2}$ より

$f(t)=(1-t^2)(1+2t)^2$ とおくと，$f(t)=-4t^4-4t^3+3t^2+4t+1$ より

$f'(t)=-2(2t+1)(4t^2+t-2)$ となる．

ここで $\pi-3\theta>0$ より $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$，ゆえに $0<2\theta<\dfrac{2}{3}\pi$．$\cos 2\theta=t$ と置いたので

$-\dfrac{1}{2}<t<1$ だから $f(t)$ の増減は

t	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗	最大	↘	

となる．

∠B＝2θ より $t=\cos$ ∠B なので，求める値は cos ∠B＝$\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。